

CAPITOLO I

LO SVILUPPO DELLE ABILITA' MATEMATICHE

Tra i primi studiosi che si sono interessati al processo di costruzione del concetto di numero (Piaget, Szeminska, 1941) nei bambini, vi è lo psicologo Jean Piaget, il quale sosteneva che il concetto di numerosità non si sviluppasse prima dei 7 anni, inteso come periodo in cui si sviluppano le capacità tipiche del pensiero operatorio. Secondo lo psicologo sopracitato, difatti, solo nel momento in cui il tutto viene riconosciuto come invariante, senza l'interferenza delle caratteristiche degli elementi come dimensione e forma, allora sarà possibile effettuare le operazioni sulla quantità.

Piaget spiega questo concetto attraverso un esperimento in cui mostra a dei bambini, tra i 4 e gli 8 anni di età, due bicchieri (A e B) i quali contengono la stessa quantità d'acqua. Versa poi il contenuto del bicchiere B in un bicchiere C, più alto e stretto, e chiede ai bambini se la quantità d'acqua contenuta sia la stessa. I bambini di 4 o 5 anni verranno influenzati da quello che è l'indizio percettivo, cioè dalla forma del bicchiere e quindi penseranno che la quantità d'acqua si modifichi in base alla forma e alla dimensione del bicchiere; dopo i 6 anni, quando il bambino inizia a avere una coordinazione logica più raffinata, riconoscerà che anche se la forma dei bicchieri cambia, ciò che è presente al loro interno rimane invariato. Nonostante Piaget sostenesse che il concetto di numerosità venisse acquisito tardi durante lo sviluppo del bambino, studi successivi mostrano come il bambino, sin dalla nascita, abbia la capacità innata di discriminare un numero di oggetti, a tal proposito, Lucangeli, parla proprio di intelligenza numerica definita come la capacità innata di capire e pensare il mondo in termini numerici. A riprova di ciò vennero condotti degli studi come quello di Antell e Keating (1983), in cui vengono misurati i tempi di fissazione di stimoli nuovi a dei neonati a cui, inizialmente, vengono mostrati due cartoncini con puntini neri uguali. Di seguito viene mostrato un altro cartoncino con tre punti neri dal quale notarono che, i neonati sottoposti a tale test, osservavano più a lungo lo stimolo nuovo, in quanto percepito diverso dagli altri due. Notarono inoltre che, se dopo il cartoncino con tre puntini veniva mostrato nuovamente quello con due puntini i neonati lo osservavano più a lungo. Questo dimostra che è il diverso numero a determinare la preferenza e che quindi i neonati sono capaci di discriminare insiemi di due o tre elementi, evidenziando il fatto che esiste una competenza numerica preverbale innata.

1.1 Abilità di calcolo

Lo sviluppo delle abilità di calcolo è stato al centro di numerosi studi, i quali hanno messo in luce il fatto che gli individui fin dalla nascita sono in possesso della capacità di discriminare la numerosità di un insieme di oggetti. Alla base di questa capacità sono stati individuati due sistemi che permettono di percepire e rappresentare le informazioni numeriche. Il primo chiamato *Object file system* (OFS), un sistema di rappresentazione di piccole quantità di oggetti (fino a quattro), il quale sottende la capacità di numerazione rapida ed esatta di piccoli insiemi chiamata *Subitizing* (Cutini, Scatturin, Basso Moro & Zorzi, 2014; Trick e Pylyshyn, 1994). È considerata un'abilità importante per lo sviluppo matematico dei bambini (Hannula Sormunen et al, 2015; Kroesbergen et al, 2009; LeFevre et al, 2010) la quale emerge tra i 3 e i 4 anni, considerato periodo di sviluppo critico (Benoit et al, 2004; Clements e Sarama, 2014; Starkey e Cooper, 1995). Questa capacità è stata indagata in uno studio di ricerca condotto da Splinter e colleghi, i quali hanno progettato un compito di subitizing che richiedeva ai bambini di etichettare rapidamente la numerosità di insiemi che contenevano da 3 a 5 oggetti. Per valutare le competenze dei bambini il compito è stato adattato alle esperienze quotidiane dei bambini, usando immagini di libri illustrati, in cui i set variavano in 4 caratteristiche visive. Questo studio è stato preceduto da altre ricerche, le quali hanno mostrato che le caratteristiche visive presentate ai bambini esercitano un effetto sulla precisione di subitizing e sul tempo di reazione di bambini di 3 e 4 anni (Chakravarthi e Herbert, 2019; Eayrs e Lavie, 2021; Krajcsi et al., 2013; Trick, 2008).

Oltre al subitizing, un'altra capacità importante è l'*acuità numerica*, capacità che permette di discriminare tra insiemi di diverse numerosità, la quale migliora con l'età, infatti durante lo sviluppo i bambini sono in grado di discriminare numerosità progressivamente più ampie (Halberda & Feigenson, 2008; Halberda, Ly, Wilmer, Naiman & Germine, 2012; Piazza, Facoetti, Trussardi, Berteletti, Conte et al., 2010). Le ricerche effettuate rivelano che i neonati sono capaci di rappresentare quantità di oggetti pari o inferiori a tre (Chiappe, 2005); mentre i bambini più grandi riescono ad enumerare in maniera più rapida piccoli gruppi di oggetti sino a quattro elementi (Sophian e Crosby, 2008). Sia la capacità di subitizing che l'acuità numerica hanno un ruolo importante nell'acquisizione delle competenze numeriche formali e sono collegate ai risultati matematici (Butterworth, 2010; Lourenco, Bonny, Fernandez e Rao, 2012; Mazzocco, Feigenson e Halberda, 2011b; Schleifer & Landerl, 2011; Sella, Lanfranchi & Zorzi, 2013; Starr, Libertus & Brannon, 2013; vanMarle, Chu, Yaoran & Geary, 2014).

Il secondo sistema è chiamato *Sistema Analogico Approssimato* (ANS) il quale permette ai bambini di rappresentare il numero di oggetti presenti nell'ambiente in modo approssimativo (Dehaene, 2001; Nieder, 2021). In questo modo i bambini preverbali riescono a confrontare insiemi ancora prima che

avvenga un processo di apprendimento che permetta di combinare numeri esatti, inoltre, i bambini che hanno una maggiore acutezza ANS sono coloro che hanno risultati migliori nei test di matematica precoce, infatti l'acutezza ANS è un predittore affidabile dell'acquisizione delle capacità matematiche. Il sistema numerico approssimativo o ANS, emerge già all'età di 6 mesi (Libertus e Brannon, 2010), sviluppandosi fino all'età adulta quando l'individuo è in grado di differenziare tra rapporti molto piccoli (Price et al., 2012). Le rappresentazioni astratte legate a questi due sistemi, l'OFS e l'ANS, forniscono una percezione di quantità chiamata Number Sense.

Nel periodo compreso tra i 2 e i 6 anni i bambini costruiscono la loro conoscenza numerica attraverso l'acquisizione di concetti come la numerosità, la quantità, la classificazione o la conta. Sono stati individuati quattro processi alla base dell'abilità numerica (Lucangeli, Tressoldi, Fiore, 1998; Ianniti, Lucangeli, 2005);

1. *I processi lessicali* : si riferiscono alla capacità di attribuire il nome ai numeri, sia dire la sequenza dei numeri che saperli leggere e scrivere (Séron, Deloche, 1984; Temple, 1991).
2. *I processi semantici*: riguardano la capacità di capire il significato del numero attraverso una rappresentazione astratta di quantità (McCloskey, Caramazza, Basili, 1985; Dehaene, 1992).
3. *I processi sintattici* riguardano la capacità di individuare il valore esatto delle cifre a seconda della posizione occupata all'interno del numero (unità, decine ecc) (Fuson e Hall, 1983).

Lucangeli nel 2003 ha proposto un programma di potenziamento e recupero delle abilità numeriche di calcolo che si focalizza sulle modalità cognitive dell'elaborazione del sistema numerico. Il programma prevede lo sviluppo dell'intelligenza numerica, riguarda lo sviluppo di abilità cognitive e metacognitive implicate nella costruzione della conoscenza numerica dall'età di 3 anni fino ai 14.

1.2 Senso del Numero

Il *senso del numero*, o *Number Sense*, è importante nella prima educazione matematica e si sviluppa quando i bambini apprendono diversi modi di pensare i numeri, di rappresentarli, sviluppando percezioni dell'effetto delle operazioni sui numeri (Consiglio Nazionale dei Docenti di Matematica, 2000). Il senso del numero si riferisce alla capacità di comprendere, stimare e manipolare rapidamente valori numerici (Dehaene, 2001) e influenza la prestazione matematica dei bambini, che viene promossa con l'educazione. Sin dalla nascita i bambini posseggono la capacità di capire i numeri (Clarke & Beck, 2021) e con l'apprendimento sono in grado di rappresentarli con precisione.

Baroody (2006) sostiene che il senso del numero è alla base delle abilità aritmetiche dei bambini e, attraverso l'educazione matematica, essi vengono posti nella condizione di imparare ulteriormente a

calcolare e manipolare i numeri sulla base della rappresentazione numerica. Ad esempio, se i bambini hanno difficoltà nel manipolare la rappresentazione non verbale dei numeri, potrebbero essere limitati nel calcolo veloce (Cohen et al., 2000). Anche l'intelligenza non verbale è un fattore importante che influenza le capacità aritmetiche di base dei bambini, infatti è considerata un importante predittore dei risultati in matematica (Lechner et al., 2019; Peng et al., 2019). L'intelligenza non verbale, il senso dei numeri, l'abilità aritmetica di base e il punteggio matematico dei bambini sono significativamente correlati tra loro. Il senso dei numeri gioca un ruolo importante nel rendimento matematico dei bambini in una fase specifica, ovvero nella scuola primaria.

Sono state individuate le abilità numeriche di base quali la classificazione, le abilità non simboliche e le abilità di conteggio (Aunio et al., 2004, 2010). Le ricerche svolte su bambini di scuola materna e scuola primaria mostrano come le abilità numeriche di base, come la comprensione della grandezza o le abilità di conteggio, sono associate ad una migliore aritmetica e a migliori risultati matematici. (Aunio & Rasanen, 2016; Booth & Siegler, 2006, 2008; Cowan & Powell, 2014; Dowker, 2008; Holloway & Ansari, 2009). Inoltre, queste abilità numeriche di base e la comprensione della grandezza dei numeri, costituiscono un predittore molto rilevante dei risultati aritmetici dei bambini (Bailey et al., 2014; Lyons et al., 2014).

1.3 Conteggio

L'abilità di conteggio e il subitizing sono due processi distinti ma complementari nello sviluppo dell'abilità matematica dei bambini. Il subitizing è un processo rapido che viene sostituito dal conteggio quando l'importo diventa quattro o più; dunque, l'uso del conteggio consente di determinare le quantità esatte ed è una capacità di enumerazione fondamentale (Gelman e Gallistel, 1978), che si sviluppa quando i bambini iniziano a rendersi conto che i numeri possono essere utilizzati per contare gli oggetti. Intorno ai 5 anni raggiungono la fase del conteggio, ossia iniziano a diventare consapevoli del fatto che il conteggio inizia dal numero 1, che ogni oggetto deve essere contato una volta e che l'ultimo numero dà il totale di tutti gli oggetti. Questo principio di cardinalità è molto importante per comprendere il conteggio (Ansari et al., 2003).

Prima che l'abilità di conteggio venga acquisita, i bambini intorno ai 2/3 anni, possiedono una forma di conteggio chiamata *conteggio non verbale* che si basa sulla sensibilità innata di codificare e riprodurre la numerosità. Uno dei primi modelli di Gelman e Gallistel (1978), spiega come avviene il passaggio dalla conoscenza preverbale all'abilità di conteggio effettivo, e si basa su 5 principi di calcolo:

1. Principio della corrispondenza biunivoca;
2. Principio dell'ordine stabile, per cui le parole numero hanno un ordine definito che deve essere applicato anche agli oggetti da contare;
3. Principio della cardinalità;
4. Principio di astrazione;
5. Principio di irrilevanza dell'ordine.

I meccanismi innati (conoscenze non verbali) e i meccanismi appresi (parole-numero) sono in relazione tra loro e in fase d'apprendimento del conteggio, si combina l'utilizzo di entrambi i meccanismi di quantificazione, preparando così il bambino ad acquisire le competenze procedurali più complesse che sono alla base delle abilità di calcolo. Vengono individuati quattro modi (Siegler e Mitchell, 1982 cit in Cornoldi, 2019) che il bambino utilizza per risolvere i calcoli a mente, ossia: *il conteggio con le dita esplicito*; *il conteggio verbale ad alta voce senza l'uso delle dita*; *l'uso delle dita senza conteggio*; *la mancanza di strategia*. La scelta della modalità, inoltre, dipende dal livello di fiducia nelle proprie abilità da parte del bambino.

L'utilizzo delle dita è una abilità che si osserva quando si imparano operazioni come, ad esempio, l'addizione o la sottrazione. Man mano che apprendono altre strategie i bambini abbandonano l'uso delle dita prediligendo ad esempio l'aritmetica mentale (Poletti et al, 2022). Questa associazione tra dita e numeri viene descritta da una teoria chiamata *teoria della matematica incarnata*, proposta da Núñez e Lakoff (2000), la quale ha come riferimento la più ampia teoria della cognizione incarnata (Shapiro, 2011; Varela, Thompson e Rosch, 1991), secondo cui le esperienze sensoriali motorie sono importanti sia per l'apprendimento numerico, sia per costruire le rappresentazioni mentali dei numeri, in modo tale che si possa recuperare la conoscenza dei fatti numerici in maniera più semplice (Gallese & Lakoff, 2005; Lakoff & Núñez, 2000). L'uso delle dita appare vantaggioso per acquisire le abilità numeriche di base, infatti è stato dimostrato come i bambini che utilizzano le dita, ottengono risultati migliori rispetto ai bambini che non adottano questa strategia (Dupont-Boime & Thevenot, 2018; Jordan, Kaplan, Ramineni e Locuniak, 2008).

Sono due le procedure che prevedono l'uso delle dita, come il conteggio delle dita (Bender e Beller, 2012) e la gestualità numerica delle stesse, detto *finger montring* (Di Luca & Pesenti, 2011). Queste due strategie si differenziano per i processi senso motori coinvolti e anche per i contesti in cui vengono utilizzate. Ad esempio, il conteggio con le dita viene usato quando si recupera un elenco di elementi dalla memoria e per tener traccia del numero degli elementi nominati, come quando si contano gli ospiti che sono invitati ad una cena. I gesti numerici delle dita, invece, sono usati per rappresentare e

comunicare grandezze, ad esempio il genitore che spiega al proprio figlio come indicare la propria età usando le dita (Lüken, 2019).

È molto frequente da parte dei bambini utilizzare e mescolare queste strategie come, ad esempio, quando fanno una somma di $4+2$; essi potrebbero rappresentare entrambi gli operandi con i gesti dei numeri delle dita, ciascuno su una mano, oppure contare il numero di dita estese. Queste due strategie di soluzione, che si basano sull'uso delle dita per il conteggio, vengono considerate il fondamento dell'aritmetica di base.

Una spiegazione per l'associazione tra dita e numeri è data dal fatto che le prime sono funzionalmente rilevanti per lo sviluppo numerico di base (Butterworth, 1999; Fischer et al., 2020, 2022); infatti le strategie basate sulle dita come il conteggio e la gestualità del numero o la combinazione di entrambe, può andare a rafforzare l'apprendimento numerico a tre livelli diversi, come suggeriscono Krajewski e Schneider (2009) che sono il conteggio, la comprensione della cardinalità e la comprensione delle relazioni parte-tutto.

Per quanto riguarda il conteggio, l'utilizzo delle dita va a supportare sia l'apprendimento della sequenza corretta di parole numeriche fino a 10, sia l'apprendimento di procedure di conteggio corrette (Gelman e Gallistel, 1978). A ogni dito viene assegnato un solo numero durante il conteggio (Brissaud, 1992; Crollen et al., 2011; Fayol e Seron, 2005), il quale può favorire la comprensione della cardinalità, definito *conteggio cardinalizzato* (Brissaud, 1992).

I bambini utilizzano i gesti delle dita per indicare i numeri anche quando non sono in grado di trasmettere verbalmente le informazioni numeriche. Questo indica che i numeri possono essere appresi prima della parola numerica e possono contribuire a memorizzare le parole numeriche (Nicoladis, 2010). Quando si tratta della relazione parte-tutto come fondamento dell'aritmetica di base fino a 10, i bambini utilizzano le dita per risolvere semplici problemi di addizione e sottrazione (Fuson et al., 1982; Kullberg & Björklund, 2020; Poletti et al., 2022). Un'altra abilità numerica molto importante per il bambino è la capacità di giudicare il valore relativo dei simboli numerici. Questa abilità implica la comprensione della grandezza numerica che è fondamentale per acquisire ed eseguire i calcoli (Butterworth, Zorzi, Girelli, Jonckheere, 2000; Delazer e Butterworth, 1997). L'accesso alle rappresentazioni di grandezza numerica è automatico, indipendentemente dal fatto che siano rilevanti o meno per il compito.

L'acquisizione della competenza numerica avviene attraverso l'apprendimento e la comprensione del concetto di numero e inizia acquisendo la sequenza delle parole-numero chiamata *Enumerazione*, inteso come l'apprendimento dei vocaboli utilizzati per contare. È un concetto che viene acquisito verso i 5 anni, quando il bambino riesce a contare in maniera bidirezionale, cioè da 1 a 5 per esempio, e poi all'inverso, da 5 a 1. Un'altra competenza che va a migliorare intorno ai 5 anni è la

corrispondenza biunivoca per cui il bambino riesce ad integrare parole, numero e oggetti indicando ciò che conta (Fuson, 1988).

Le ricerche hanno individuato diversi tipi di strategie per eseguire le addizioni mentali, come ad esempio il conteggio con le dita esplicito, la strategia delle dita senza evidente conteggio, il conteggio verbale ad alta voce senza il supporto delle dita e la mancanza di una strategia che si deduce dal comportamento (Siegler e Mitchell, 1982). I bambini inizialmente usano strategie di conteggio, per poi passare a strategie che si basano sul recupero mnemonico dei risultati dei calcoli e del procedimento delle operazioni. Il modello a contatore (Groen, Parkman, 1972), in merito alle abilità di conteggio, descrive come i bambini iniziano a contare dall'addendo maggiore aggiungendo quello minore (ad esempio $5+3=5+1+1+1$). Questa strategia (Geary, Brown, Samaaranayake, 1991; Geary, 1993) viene utilizzata solo al termine del primo anno di scuola ed è preceduta dal *counting all*, con cui i bambini contano sulle dita entrambi gli addendi.

Con l'aumentare dell'età, il bambino diventa sempre più bravo e si affida alla sua conoscenza di tipo dichiarativa, quindi va a recuperare le informazioni in memoria. L'esercizio nei primi anni scolastici e la frequente presentazione delle operazioni fa sì che si rinforzino poi le risposte. Baroody (1983) sottolinea come la conoscenza procedurale si sviluppi e contribuisca ad aumentare l'efficacia del calcolo mentale durante l'apprendimento. Si passa da processi che si basano su procedure lente di conteggio, all'utilizzo di regole applicate in modo sempre più automatico. Per esempio, i bambini imparano la regola secondo cui lo zero non cambia il risultato di un'addizione.

1.4 Fluidità numerica

Durante l'acquisizione della conoscenza numerica, il bambino impara a leggere i numeri, passando dalla codifica preverbale a quella verbale. La capacità di leggere i numeri precede la capacità di scriverli, infatti, riconoscere il numero scritto è una capacità che avviene per fasi (Pontecorvo, 1985; Bialystock, 1992). Inizialmente il bambino può confondere il numero con le lettere dell'alfabeto, per esempio, legge il numero 3 come una E; poi i bambini riescono a leggere i numeri più semplici come 1, 3 e 5; verso i 6 anni riconoscono i numeri entro il 10, anche se spesso possono mostrare le difficoltà con numeri come il 6 e il 9 in quanto simili. La comprensione simbolica dei numeri si sviluppa in tre stadi (Bialystok, 1992): prima il bambino apprende il nome dei numeri, imparando a recitarli in sequenza come se fossero una filastrocca; poi impara a riconoscere e scrivere i numeri e infine attribuisce il corretto valore quantitativo al numero.

Una volta che il bambino ha padronanza nella scrittura dei numeri deve imparare sia a fare dei collegamenti tra simboli scritti e la quantità corrispondente, sia tra segni. Deve saper collegare i simboli operatori alle azioni, come ad esempio il segno + che rappresenta l'azione di unione di quantità. Successivamente il bambino impara, che ci sono delle regole che si possono trasferire ad altre situazioni, come ad esempio l'addizione con numeri a due cifre applicata a numeri più elevati. Il bambino durante la scuola primaria acquisisce l'automatizzazione delle tabelline e apprende le regole di combinazione di numeri più grandi.

Affinché si apprenda appieno la matematica (Li et al, 2018), la capacità dell'elaborazione e fluidità numerica sono delle capacità fondamentali. La fluidità aritmetica è la capacità di svolgere velocemente operazioni come, ad esempio, a 1 o 2 cifre, in maniera accurata e senza sforzo (Vanbinst et al, 2015) e viene di solito valutata attraverso dei compiti che vengono cronometrati. Più i bambini acquisiscono delle competenze di elaborazione di numeri e più saranno in grado di operare con essi in maniera fluida (Halberda et al, 2008; Wang et al, 2016).

La fluidità numerica, inoltre, costituisce il dato per identificare studenti che possono avere delle difficoltà matematiche (Mazzocco et al, 2008). Di solito gli studenti che hanno difficoltà ad acquisire la fluidità aritmetica hanno difficoltà anche nelle abilità numeriche fondamentali, come ad esempio il conteggio, il confronto o la comprensione dei numeri (Geary et al., 2012; Huijsmans et al., 2022; Zhang et al., 2020).

1.5 Modelli teorici della cognizione numerica

Per spiegare lo sviluppo delle competenze numeriche e di calcolo sono stati proposti diversi modelli teorici. Il primo modello è il *Modello di Comprensione Numerica e Calcolo Aritmetico di McCloskey, Caramazza e Basili del 1985*. Questo modello offre una descrizione e distinzione di due sistemi di calcolo, ossia quello di comprensione (input) e di produzione (output) dei numeri. Il primo sistema di calcolo comprende le conoscenze che servono per eseguire i calcoli aritmetici. Il sistema di numeri output racchiude i processi di comprensione, produzione numerica, il riconoscimento e la riproduzione dei simboli numerici e delle parole che indicano i numeri.

Un altro modello che è stato proposto è quello del *Triplo Codice di Dehaene nel 1992*, in cui si cerca di individuare una relazione più ampia tra numero e altri domini cognitivi. Ogni codice corrisponde a dei correlati neurali distinti nel cervello:

- Il *codice visivo arabo*, coinvolto nei processi di lettura e scrittura del numero. I compiti che lo attivano sono il calcolo scritto e il giudizio di parità.